Список литературы

1. Б р а з е в и ч М.В. Некоторые вопросы геометрии нормализованного многообразия Грассмана. ВИНИТИ, № 354-76 Деп.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.об-ва, 1953, №2, с. 275-382.

3. О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве.-Тр.Геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1967, 2, с.247-262.

4. Б л и з н и к а с В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-Тр.Геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 5, с.69-96.

5. К о в а н ц о в Н.И. Теория комплексов.-Изд.Киевского ун-та, 1963.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. II 1980

Л.А. В е р б и ц к а я

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ

В эквиаффинном трехмерном пространстве рассматриваются конгруэнции S парабол с кратной неторсовой поверхностью A, не являющейся огибающей семейства плоскостей парабол, причем фокальные линии на поверхности не асимптотические. Исследуются случаи, когда эта фокальная поверхность является кратной фокальной поверхностью. Рассмотрены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией S, и исследованы их свойства.

§ 1. КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С КРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе [1] построен канонический репер конгруэнции S. Начало A репера $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ помещено в фокус, образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями. Вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к параболе в точке A, вектор $\bar{e}_2$ -по диаметру параболы, проходящему через точку A, вектор $\bar{e}_2$ -по касательной к линии, сопряженной фокальной линии $\omega^2 = 0$ на поверхности A.

Относительно этого репера уравнение параболы и система уравнений Пфаффа конгруэнции имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2 - 2p x^3 = 0, \quad x^2 = 0, \quad p \neq 0, \qquad (1.1)$$

$$\omega_1^1 = -\frac{1}{8}\{(3a+c)\omega^1 + (3b+e)\omega^2\}, \quad \omega_2^3 = -\omega^2,$$

$$\omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2, \qquad \omega_3^1 = h\omega^1 + k\omega^2,$$

$$\omega_1^3 = \omega^1, \qquad \omega_3^2 = r\omega^1 + s\omega^2, \tag{1.2}$$

$$\omega_2^1 = (f-b)\omega^1 + (g-c)\omega^2, \quad d\ln p = p_1\omega^1 + p_2\omega^2,$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{8}\{(a+3c)\omega^1 + (b+3e)\omega^2\}, \quad \omega^3 = 0.$$

Для определения фокальных точек конгруэнции S в работе [1] получена система уравнений:

$$\left(\frac{1}{2p} r (x^1)^2 + f x^1\right)\omega^1 + \left(\frac{s}{2p}(x^1)^2 + g x^1 + 1\right)\omega^2 = 0, \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{h}{2p}(x^1)^2 + \frac{p_1 - a}{2} x^1 + 1 - p\right)\omega^1 + \left(\frac{k}{2p}(x^1)^2 + \frac{p_2 - b}{2} x^1\right)\omega^2 = 0.$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $(B_k)_A$ называется конгруэнция S при условии, что фокальная поверхность (A) является k-кратной фокальной поверхностью ($k = 3,4,5$).

Анализируя уравнения (1.3) и (1.2), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $(B_k)_A$ ($k=3,4,5$) существуют и определяются с произволом $(6-k)$ функций двух аргументов.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОНГРУЭНЦИЕЙ S

I. О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией L называется конгруэнция ассоциированных цилиндров с образующей, параллельной вектору e_2, и с направляющей, совпадающей с данной параболой.

Относительно канонического репера уравнение цилиндра имеет вид:

$$\Phi \equiv (x^1)^2 - 2px^3 = 0, \quad p \neq 0. \tag{2.1}$$

Фокальные точки и фокальные семейства конгруэнции L определяются системой уравнений:

$$(x^1)^2 - 2px^3 = 0, \quad p \neq 0,$$

$$\Phi_1 \equiv (f-b)x^1x^2 + hx^1x^3 + x^1(1-p) + p(p_1 - a)x^3 = 0; \tag{2.2}$$

$$\Phi_2 \equiv (g-c)x^1x^2 + kx^1x^3 + px^2 + p(p_2 - b)x^3 = 0.$$

Т е о р е м а 2. Точка A является k-кратной фокальной точкой параболы тогда и только тогда, когда точка A является k-кратной фокальной точкой ассоциированного цилиндра ($k=1,2,3$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того, чтобы система (I,3) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\frac{kr - sh}{4p^2}(x^1)^5 + \left(\frac{kf - hg}{2p} + \frac{r(p_2 - b) - s(p_1 - a)}{4p}\right)(x^1)^4 + \tag{2.3}$$

$$+\left(\frac{f(p_2 - b) + s - g(p_1 - a)}{2} - \frac{s+h}{2p}\right)(x^1)^3 + \left(\frac{a - p_1}{2} - g(1-p)\right)(x^1)^2 + (p-1)x^1 = 0.$$

Исключая из второго и третьего уравнений системы (2.2) x^2 и учитывая, что $x^3 = \frac{(x^1)^2}{2p}$, имеем

$$\frac{h(g-c) - k(f-b)}{2p}(x^1)^4 + \frac{h + (p_1 - a)(g-c) - (p_2 - b)(f-b)}{2}(x^1)^3 + \tag{2.4}$$

$$+\left((1-p)(g-c) + \frac{p(p_1 - a)}{2}\right)(x^1)^2 + p(1-p)x^1 = 0.$$

Сравнивая (2.3) и (2.4), получаем утверждение теоремы. Из (2.2) следует :

Т е о р е м а 3. Если квадрика $\Phi_1 = 0$ распадается на пару координатных плоскостей $x^1 = 0$ и $x^3 = 0$, то прямолинейная конгруэнция $\{A, e_2\}$ является цилиндрической.

II. О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией ассоциированных гиперболических параболоидов J называется конгруэнция квадрик, образующим элементом которой является квадрика, определяемая уравнением $\Phi_1 = 0$.

Рассмотрим случай

$$p = 1,\ h = 0,\ f - b = 0.$$

Уравнение образующего элемента конгруэнции $\mathcal{J}$ и система для определения фокальных семейств и фокальных точек конгруэнции $\mathcal{J}$ приводятся соответственно к виду:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2 - x^3 = 0,$$

$$\Phi_1^* = -f(x^1)^2 + a(x^2)^2 + x^1 - x^2 - \tau x^1x^3 + \frac{a-c}{2}x^3 = 0,$$

$$\Phi_2^* = -g(x^1)^2 + (c-g)(x^2)^2 - sx^1x^3 - kx^2x^3 - x^1 - x^2 + \frac{b-e}{2}x^3 = 0, \qquad x^1x^2 - x^3 = 0.$$

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $\mathcal{J}$ обладают следующими свойствами: 1/ Если вектор $\overline{e}_i$ самосопряжен относительно квадрики $\Phi_j^* = 0$, то прямолинейная конгруэнция $\{A, \overline{e}_i\}$ является цилиндрической $(i,j = 1,2;\ i \neq j)$; 2/ Если вектор $\overline{e}_3$ есть направляющий вектор аффинной нормали поверхности A, то фокус $F_2 = A + \frac{1}{b-f}e_2$ прямолинейной конгруэнции $\{A, \overline{e}_2\}$ является проекцией центра квадрики $\Phi_1^* = 0$ на плоскость $x^2 = 0$.

Свойство 1 очевидно. Докажем свойство 2. Пусть $\overline{e}_3$ - вектор аффинной нормали, тогда $a - c = b - e = 0$. Поскольку центр квадрики $\Phi_1^* = 0$ имеет координаты $(0, \frac{c_4}{a}, \frac{c_4}{\tau})$ и для конгруэнции $\mathcal{J}$ $a = f - b$, то проекцией центра квадрики $\Phi_1^* = 0$ на плоскость $x^2 = 0$ является точка $(0, \frac{c_4}{b-f}, 0)$, что и требовалось доказать.

III. Уравнение квадрики Ли поверхности A относительно данного репера имеет вид:

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 + \lambda(x^3)^2 + \frac{a-c}{4}x^1x^3 + \frac{b-e}{4}x^2x^3 - 2x^3 = 0.$$

Аналогично теореме 4 доказывается следующая

Т е о р е м а 5. Если $\overline{e}_3$ -вектор аффинной нормали четырехкратной фокальной поверхности (A) конгруэнции S, векторы e_1 и e_3, e_2 и e_3 сопряжены относительно квадрик $\Phi_1^* = 0$ и $\Phi_2^* = 0$ соответственно, то фокус $F = A - \frac{1}{s}e_3$ прямолинейной конгруэнции $\{A, e_3\}$ является центром квадрики Ли поверхности A конгруэнции S.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии.-Тр. Томского ун-та, вып. 2, 1962, с. 76-86.